INVERZNÍ FUNKCE

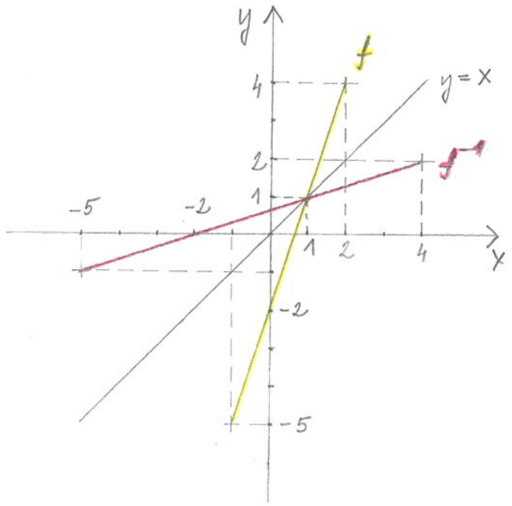
př: $f: y = 3x - 2$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$ ... úsečka mezi $[-1, -5]$ a $[2, 4]$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{y+2}{3}$$

$$\downarrow$$

$f^{-1}: y = \frac{x+2}{3}$, $x \in \langle -5, 4 \rangle$ ... inverzní fce k fci f
úsečka mezi $[-5, -1]$ a $[4, 2]$



f:

x	-1	0	1	2
y	-5	-2	1	4

f^{-1}:

x	-5	-2	1	4
y	1	0	1	2

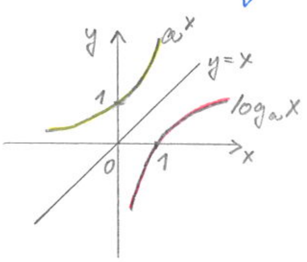
Definice: Je-li f prostá funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** f^{-1} definovaná na $H(f)$, přičemž platí

$$[x, y] \in Gr\, f \iff [y, x] \in Gr\, f^{-1}.$$

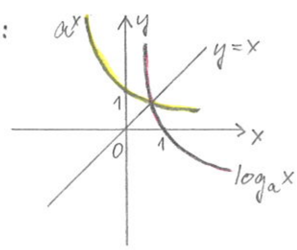
Platí:
- $D(f) = H(f^{-1})$, $\quad H(f) = D(f^{-1})$
- $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$
- Grafy f a f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$.

př: Exponenciální a Logaritmická funkce

$a \in (1, \infty)$:



$a \in (0, 1)$:



$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x$$

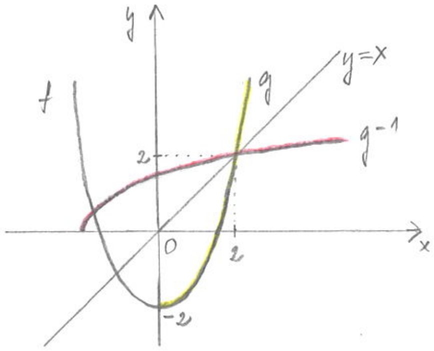
f a f^{-1} jsou obě rostoucí nebo obě klesající.

Poznámka: $M \subset D(f)$, $g(x) = f(x)$ $\forall$ $x \in M$

$g = f|_M$ ... fce g je **restrikce** (zúžení) fce f na množinu M

Př: $f: y = x^2 - 2$ ... není prostá $\rightarrow$ $g: y = x^2 - 2$, $D(g) = \langle 0, \infty)$

– je prostá $H(g) = \langle -2, \infty)$



$\downarrow$

$x = \pm\sqrt{y+2}$

$\downarrow$

$g^{-1}: y = \sqrt{x+2}$, $D(g^{-1}) = \langle -2, \infty)$

$H(g^{-1}) = \langle 0, \infty)$

Př: Určete inverzní fci f^{-1} k fci f a $D(f)$, $D(f^{-1})$

a) $f: y = \frac{x+1}{x-3}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$xy - 3y = x + 1$ $\rightarrow$ $y = 1 + \frac{4}{x-3}$, graf: hyperbola $S[3, 1]$

$xy - x = 3y + 1$

$x = \frac{3y+1}{y-1}$

$f^{-1}: y = \frac{3x+1}{x-1}$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f: y = e^{2x-1}$ $D(f) = \mathbb{R}$

$\ln y = \ln e^{2x-1}$

$\ln y = 2x - 1$

$2x = 1 + \ln y$

$x = \frac{1}{2}(1 + \ln y)$

$f^{-1}: y = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}^+$

c) $f: y = \log_3(x+5)$ $D(f) = (-5, \infty)$ $x + 5 > 0$, $x > -5$

$3^y = 3^{\log_3(x+5)}$

$3^y = x + 5$

$x = 3^y - 5$

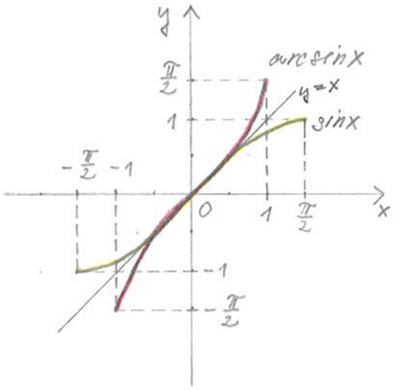
$f^{-1}: y = 3^x - 5$ $D(f) = \mathbb{R}$

Cyklometrické funkce

- funkce inverzní ke goniometrickým funkcím zúženým na konkrétní vybrané intervaly, v nichž jsou prosté

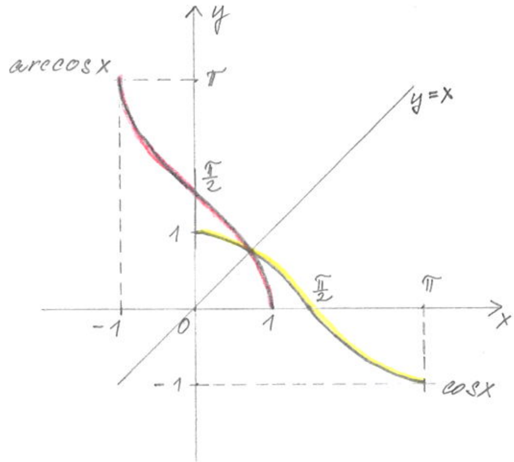
• arkussinus $y = \arcsin x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$
  $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$



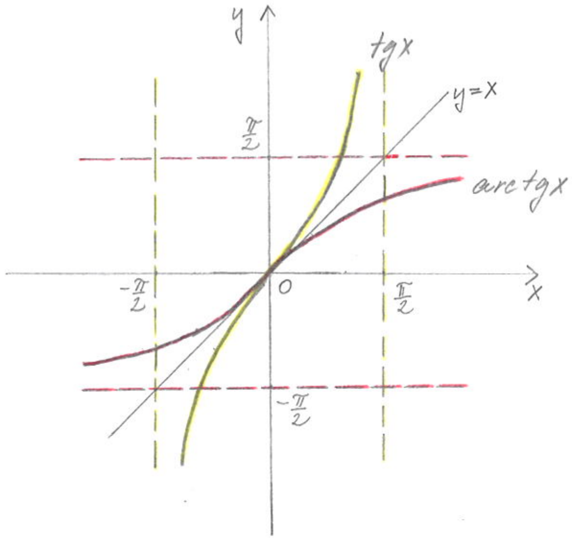
• arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$
  $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$



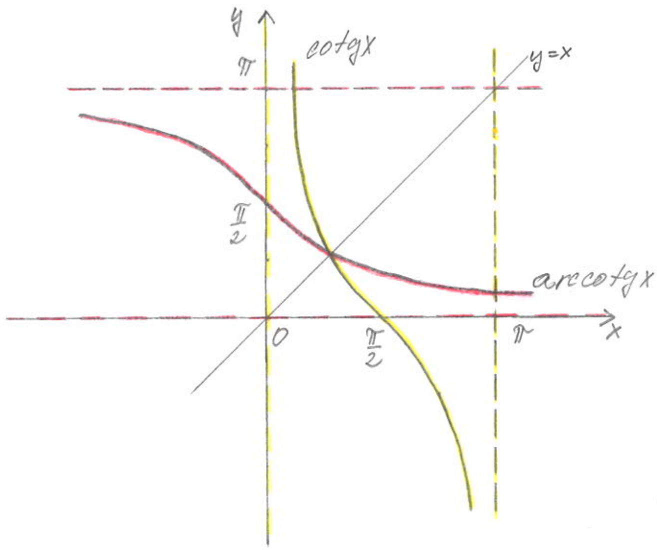
• arkustangens $y = \mathrm{arctg}\, x$

- $D(f) = \mathbb{R}$
  $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



• arkuskotangens $y = \mathrm{arccotg}\, x$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = (0, \pi)$



x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$\sin(\arcsin x) = x$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin(\sin x) = 0$ $\qquad$ $tg\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$

⋮

př: Určete inverzní fci f^{-1} k fci f a $D(f)$, $D(f^{-1})$

a) $f: y = \arcsin(1-x)$

$\sin y = 1-x$

$x = 1-\sin y$

$\underline{\underline{f^{-1}: y = 1-\sin x}}$

$D(f): -1 \leq 1-x \leq 1 \quad /-1$

$-2 \leq -x \leq 0 \quad /\cdot(-1)$

$2 \geq x \geq 0$

$\underline{\underline{D(f) = \langle 0, 2 \rangle}}$

$H(f): f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$f(2) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\underline{\underline{D(f^{-1}) = H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}}$

b) $f: y = 3-2\cot g(1-2x)$

$2\cot g(1-2x) = 3-y$

$\cot g(1-2x) = \frac{3-y}{2}$

$1-2x = arccotg\frac{3-y}{2}$

$x = -\frac{1}{2}(-1+arccotg\frac{3-y}{2})$

$\underline{\underline{f^{-1}: y = \frac{1}{2}(1-arccotg\frac{3-x}{2})}}$

$D(f): 1-2x \in (0, \pi)$

$1-2x > 0 \qquad 1-2x < \pi$

$x < \frac{1}{2} \qquad x > \frac{1}{2}(1-\pi)$

$\underline{\underline{D(f) = (\frac{1}{2}(1-\pi); \frac{1}{2})}}$

$\underline{\underline{D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}}}$